

DIFFERENTIAL EQUATIONS

المعادلات التفاضلية



Sawa University

Engineering Technology

Department of Refrigeration and Air-

Conditioning Engineering

3rd Year

Lecture 1

M.Sc. Rand Zwayen

Engineering and Numerical Analysis

Course Learning Outcomes:

- The ability to solve practical engineering problems in engineering using logical and mathematical methods.
- The possibility of converting different geometric and physical cases into a mathematical model through geometric analysis.
- It is possible to describe the behaviors of different complex engineering problems through appropriate assumptions.

Home works:

Home works and class assignments will be given during the course.

Examinations and Grading:

1- Mid-term Exam 50%

2- Final Term Exam 50%

Total Grading 100 %

Textbooks& references:

- 1- Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig , John Wiley & Sons, Inc.
- 2- Advanced Engineering Mathematics, Peter V. O'Neil, Thomson Brooks/Cole
- 3- Advanced Engineering Mathematics, A.B. Mathur & V.P. Jaggi, Khanna Publishers
- 4- Advanced Engineering Mathematics, Wyle Barrett /fifth edition.
- 5- Numerical Methods for Scientists and Engineers, R.w. Hamming knowledge.
- 6- Numerical Analysis, Richard L. Burden & J. Douglas Faires.
- 7- Introduction to Numerical Analysis, F.B. Hildebrand.

Lecture 1

Differential Equations المعادلات التفاضلية

A **differential equation** is any equation which contains one derivative or more. The derivative may be either ordinary derivative or partial derivative.

المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة على الأقل أو أكثر, وتكون المشتقة إما مشتقة اعتيادية أو مشتقة جزئية.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 3y = 2x$$

$$y'' + 4y' - 3y = 2x$$

This shows a relationship between a function y and its derivative with respect to x .

Solution of the Differential Equation: is finding an equation without any derivatives, and when substituted in the differential equation achieved.

حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد معادلة خالية من المشتقات وإذا عوضت في المعادلة التفاضلية تحققها

Classification of Differential Equations:

1. By Type : بواسطة النوع

- **Ordinary Differential Equations (ODEs):** is an equation containing one independent variable.

المعادلة التفاضلية الاعتيادية: هي المعادلة التي تحتوي على متغير مستقل واحد

For Example:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = f(x)$$

Where:

y : is dependent variable متغير معتمد

x : is independent variable متغير مستقل

- **Partial Differential Equations (PDEs):** is an equation containing more than one independent variable

المعادلة التفاضلية الجزئية : وهي المعادلة التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل

For Example:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

Where: u is dependent variable

t & x : is independent variable

2. By Order:

The number of highest derivative in a differential equation. A differential equation of order 1 is called First order, order 2 is called Second order etc.

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة فيها.

For Example:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

First order

معادلة من الرتبة الأولى

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Second order

معادلة من الرتبة الثانية

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} x = e^x$$

Third order

معادلة من الرتبة الثالثة

3. By degree

The highest power which is raised to the highest-order derivative existed in differential equation.

درجة المعادلة التفاضلية هي الأس (القوة) الذي ترفع إليه أعلى مشتقة في المعادلة، بشرط أن تكون المعادلة مكتوبة على شكل متعدد حدود أي لا تحتوي على جذور أو دوال مثل الجيب أو اللوغاريتم للمشتقات

NOTE: الرتبة $\neq$ الدرجة: الرتبة تشير إلى أعلى مشتقة، بينما الدرجة تشير إلى أس المشتقة الأعلى (إذا كانت المعادلة متعددة الحدود في المشتقات).

$y'' + 2y' - y = 0$	First Degree	معادلة من الدرجة الأولى
$y''' + 3y'' - \ln x = 0$	First Degree	معادلة من الدرجة الأولى
$(\frac{d^2y}{dx^2})^2 - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$	Second Degree	معادلة من الدرجة الثانية
$(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + (\frac{dy}{dx}) - y = 0$	Third Degree	معادلة من الدرجة الثالثة

4. By Linearity:

Linear Differential Equation:: The dependent variable and its derivatives appear to the first power and are not multiplied together.

Non-Linear Differential Equation: If they appear with powers other than one, or are multiplied together.

يقال أن المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته كمقادير من

الدرجة الأولى أي لا يوجد فيها حدود بالصورة $y^2, y^3, \dots$ أو yy' أو $(y')^2, (y'')^2, \dots$ أو $(y'y'')$ وهكذا.

For Example:

$\frac{dy}{dx} + y = 0$	Linear	خطية
$\frac{dy}{dx} = x + y^2$	Non Linear	غير خطية، لأن y مرفوعة للأس 2
$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(y) = 0$	Non Linear	غير خطية، لأن y دخلت في دالة $\sin$

Example 1: Classify each of following D.E. by (type -order-degree-linearity)

1- $\frac{d^2y}{dx^2} + 4xy + 2y = \cos x$

(Ordinary, Second order, First Degree, Linear)

2- $(y'')^2 - 9y = 2e^{2x}$

(Ordinary, Second order, Second Degree, Non Linear)

3- $y''' + \sin y = 0$

(Ordinary, Higher order, First Degree, Non Linear)

Solution of the Differential Equation:

حل المعادلة التفاضلية

There is multi-solution for the differential equation:

1. **General Solution:** it is a solution that contain one or more essential constant.

الحل العام: هو ذلك الحل الذي يحتوي على ثابت اختياري واحد على الأقل.

For Example:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \rightarrow \int dy = \int f(x) \cdot dx + c$$

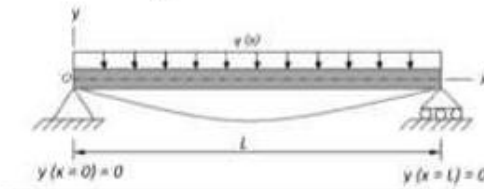
where c : is essential constant

دائما عدد الثوابت الاختيارية تساوي او اقل من رتبة المعادلة التفاضلية.

2. Particular Solution: it is a solution obtained from general solution by finding the values of essential constants. it depended on:

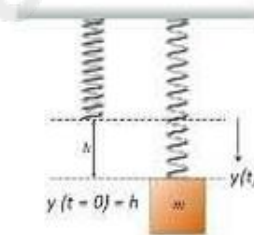
الحل الخاص: هو ذلك الحل الذي نحصل عليه من الحل العام بإيجاد قيم الثوابت الاختيارية. وعادة يحتوي على شروط إيجاد الثوابت الاختيارية:

a- Boundary conditions for static problems



b- Initial conditions for dynamic problems

For Example: Initial conditions at $(t=0)$



3. Singular Solution: solution cannot be found from general solution.

الحل الشاذ: هو ذلك الحل الذي ال يمكن الحصول عليه من الحل العام.

4. Complete Solution: it is a solution that by which can get all the solutions of the differential equation.

الحل التام: هو ذلك الحل الذي يمكن الحصول على جميع حلول المعادلة التفاضلية.

Example 2: Prove that $y = ae^{-x} + be^{2x}$ is general solution of D.E .
 $y'' - y' - 2y = 0$

Sol:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$y = ae^{-x} + be^{2x}$$

$$y' = -ae^{-x} + 2be^{2x}$$

$$y'' = ae^{-x} + 4be^{2x}$$

Substitute y'', y', y in above D.E

$$\therefore a e^{-x} + 4b e^{2x} + a e^{-x} - 2b e^{2x} - 2a e^{-x} - 2b e^{2x} = 0$$

$$0 = 0 \quad \therefore \text{ok}$$

Home work:

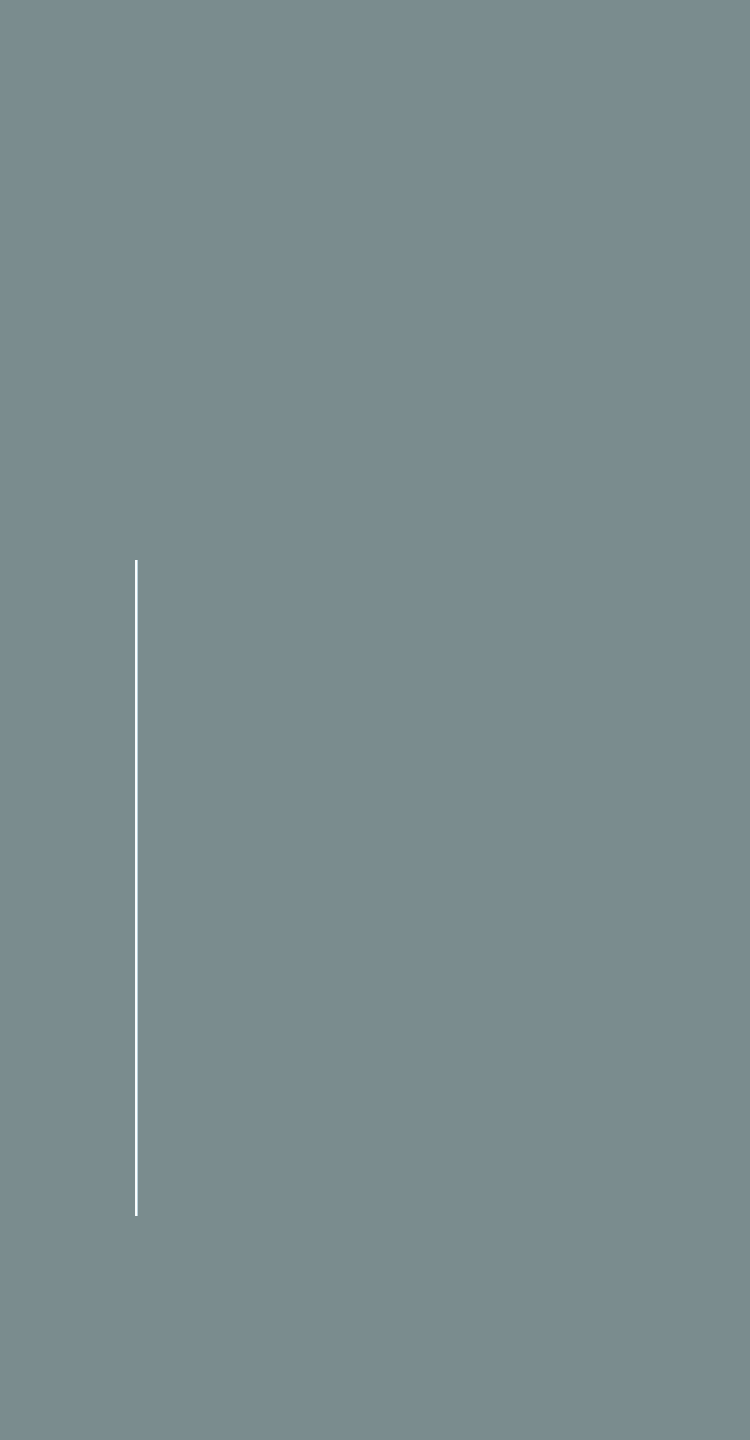
1-Classify each of following D.E. by (type -order-degree-linearity)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u = 0$$

$$(y')^2 + y = 0$$

2- Prove that $y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ is general solution of D.E .
 $y'' + 4y = 0$



Thank You