

APPLICATION OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS



Sawa University

Engineering Technology

Department of Refrigeration and Air-

Conditioning Engineering

3rd Year

Lecture 3

M.Sc. Rand Zwayen

Lecture 3

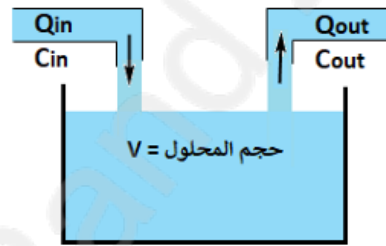
Application of first order differential equations

1-Dissolution of salts in solutions ذوبان الأملاح في المحاليل

لنفترض أنه لدينا حوض يحتوي على ماء مالح بتركيز ملح معين ليكن (C_0) ، ويتم إضافة ماء مالح جديد إلى الحوض بتصريف (Q_{in}) وبتراكيز معين ملحي ليكن (C_{in}) نتيجة لذلك، يحدث تغير في ملوحة الماء داخل الحوض مع الزمن، ويزداد حجم الماء بما يتناسب مع التدفق الداخل. المطلوب هو حساب مقدار كمية الملح داخل الحوض كدالة للزمن، وذلك من خلال صياغة المعادلة الرياضية المناسبة

General equation

$$\frac{dw}{dt} = Q_{in} \times C_{in} - Q_{out} \times C_{out}$$



حيث:

Q_{in} : التصريف الداخل إلى الحوض، وحدته = وحدة حجم / وحدة زمن.

C_{in} : تركيز الملح في الماء الداخل للحوض، وحدته = وحدة وزن / وحدة حجم.

Q_{out} : التصريف الخارج من الحوض، وحدته = وحدة حجم / وحدة زمن.

وحدة الوزن: *etc.* Ib, kN, N, وحدة الحجم: *etc.* m³, Liter, gal,*etc.*

وحدة الزمن: *etc.* Sec, min, hour, *etc.*

C_{out} : تركيز الملح في الماء الخارج من الحوض وهو متغير مع الزمن ويحسب من المعادلة التالية:

$$C_{out} = \frac{w}{V + (Q_{in} - Q_{out}) \cdot t}$$

الحجم متغير $if Q_{in} \neq Q_{out}$

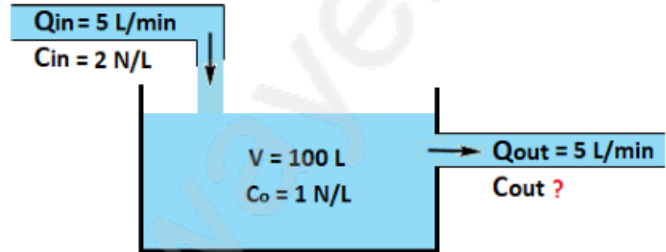
W : كمية الملح داخل الحوض وهو متغير مع الزمن

V : حجم المحلول في الحوض

ملاحظة: كمية الماء في الحوض قبل الأضافة $Q_0 \cdot V = 0$

EX1: A tank is initially filled with (100 Liter) of salt solution containing (1 N/L) of salt. Fresh brine containing (2 N/L) of salt running in the tank at rate of (5 L/min) and the mixture kept uniform and runs out at the same rate. Find:

1. The amount of salt in the tank at any time.
2. How long it will take for this amount of salt to reach 150 N.



Sol:

$$\frac{dw}{dt} = Q_{in} \times C_{in} - Q_{out} \times C_{out}$$

$$Q_{in} = 5 \text{ L/min}, \quad C_{in} = 2 \text{ N/L}$$

$$Q_{out} = 5 \text{ L/min}$$

$$C_{out} = \frac{w}{V + (Q_{in} - Q_{out}) * t} = \frac{w}{100 + (5 - 5) * t} = \frac{w}{100 + (0) * t} = \frac{w}{100}$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times 2 \frac{\text{N}}{\text{L}} \right) - \left(5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{w}{100} \right)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(10 - \frac{W}{20} \right) = \frac{200 - W}{20}$$

$$\int \frac{dw}{(200 - W)} = \int \frac{dt}{20} \quad * -1 = \int -\frac{dw}{(200 - W)} = \int -\frac{dt}{20}$$

$$\ln / 200 - W / = -\frac{t}{20} + c \quad \text{by } e^x$$

$$200 - W = e^{-\frac{t}{20} + c} = e^{-\frac{t}{20}} \cdot e^c$$

$$e^c = k \text{ constant}$$

$$200 - W = k e^{-\frac{t}{20}}$$

$$W = 200 - k e^{-\frac{t}{20}}$$

Apply boundary condition: at $t = 0$, $w = Co \times V = 1 \times 100 = 100 \text{ N}$

$$100 = 200 - k e^{-\frac{0}{20}} \rightarrow k = 100$$

$$W = 200 - k e^{-\frac{t}{20}}$$

$$W = 200 - 100 e^{-\frac{t}{20}}$$

1- $W = 150 \text{ N}$, $t = ?$

$$W = 200 - 100 e^{-\frac{t}{20}}$$

$$150 = 200 - 100 e^{-\frac{t}{20}} \rightarrow 50 = 100 e^{-\frac{t}{20}}$$

$$\frac{50}{100} = e^{-\frac{t}{20}} \rightarrow 0.5 = e^{-\frac{t}{20}} \quad \text{by ln both sides}$$

$$\frac{-t}{20} = \ln 0.5 \rightarrow \frac{-t}{20} = -0.693$$

$$t = 13.86 \text{ min}$$

2-Temperature درجة الحرارة

Newton's law of cooling states that the time rate of an object raises as the difference in temperature between object and surroundings.

$$\text{Newton law} = \frac{du}{dt} = k (u - \text{surrounding temperature})$$

u = temperature of object after (t) time

k = constant

surrounding temperature: درجة الحرارة المحيطة

Ex2: If an object cools from 80°C to 60°C in 20 minutes, find the temperature in 40 minute if the surrounding temperature $= 20^\circ\text{C}$

Sol:

$$\frac{du}{dt} = k (u - \text{surrounding temperature})$$

$$\frac{du}{dt} = k (u - 20)$$

$$\int \frac{du}{(u - 20)} = \int k dt$$

$$\ln |u - 20| = kt + c \quad \text{by } e^x$$

$$u - 20 = e^{kt + c}$$

$$u - 20 = e^{kt} \cdot e^c$$

$$u - 20 = e^{kt} \cdot C \quad (e^c = C)$$

$$u = C e^{kt} + 20$$

Apply boundary condition: at $t = 0$, $\rightarrow u = 80\text{ C}^\circ$

$$u = C e^{kt} + 20$$

$$80 = C e^{k*0} + 20$$

$$80 - 20 = C e^{k*0}$$

$$60 = C$$

$$C = 60$$

$$u = C e^{kt} + 20$$

$$u = 60 e^{kt} + 20$$

Apply boundary condition at $t = 20$, $\rightarrow u = 60\text{ C}^\circ$

$$u = 60 e^{kt} + 20$$

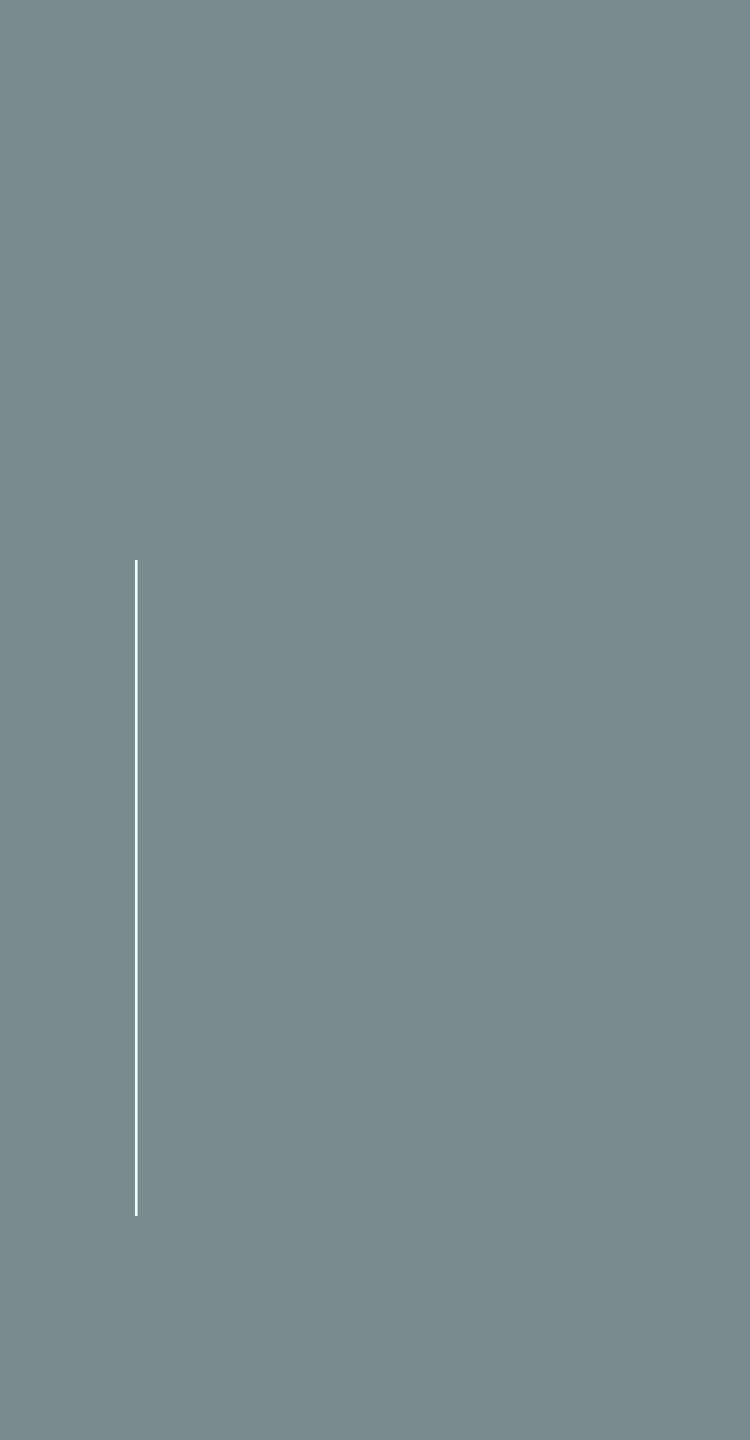
$$60 = 60 e^{k*20} + 20$$

$$K = -0.02027$$

$$u = 60 e^{-0.02027*t} + 20$$

at $t = 40\text{ min}$

$$u = 46.7\text{ C}^\circ$$



Thank You