

متسلسلة فوريير FOURIER SERIES



Sawa University

Engineering Technology

Department of Refrigeration and Air-

Conditioning Engineering

3rd Year

Lecture 7

M.Sc. Rand Zwayen

Lecture 7

Fourier Series متسلسلة فوريير

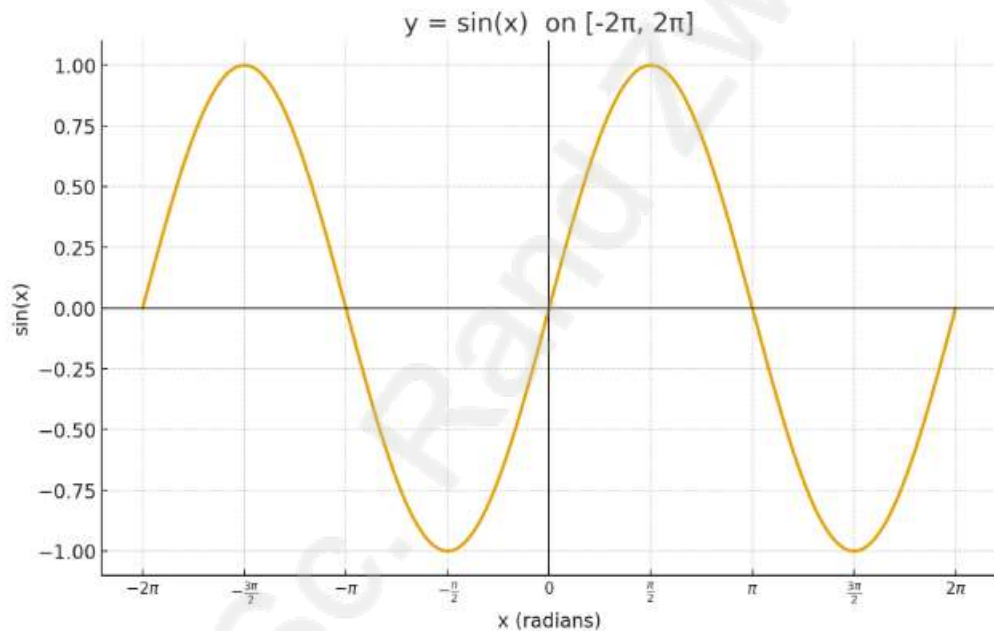
A function $f(x)$ is said to have period P if $f(x + p) = f(x)$ for all (x)

Let $f(x)$ has period 2π , it is enough to consider behavior of the function on the interval $[-\pi, \pi]$

قيمة (p) تسمى دورة الدالة $f(x)$ عندما تضاف الى (x)

Ex: $f(x) = \sin(x)$

Periodic function with $P=2\pi$, Where $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



يقصد بتحليل فورييه للدالة $f(x)$ هو كتابة هذه الدالة في صورة متسلسلة من $\sin, \cos$ للمتغير المستقل (x)

الصيغة العامة لمتسلسلة فوريير هي :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{b_1}^{b_2} f(x) \cos nx dx$$

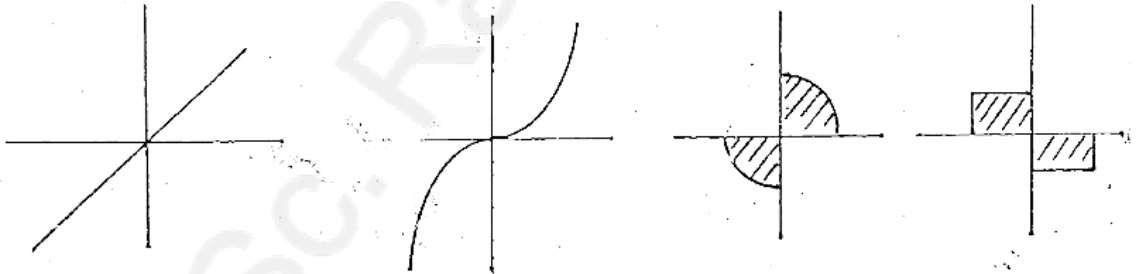
$$b_n = \frac{1}{P} \int_{b_1}^{b_2} f(x) \sin nx dx$$

ملاحظة مهمة جدا:

1- الدالة الفردية odd : هي الدالة التي عند رسمها تكون متناظرة حول نقطة الأصل كما في الأمثلة

$$a_0 = a_n = 0$$

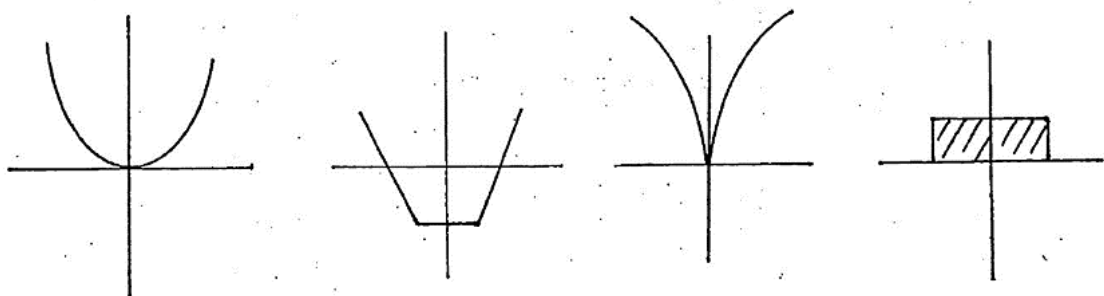
$$b_n = ?$$



2- الدالة الزوجية even : هي الدالة التي عند رسمها تكون متناظرة حول محور y كما في الأمثلة

$$a_0 = ? , a_n = ?$$

$$b_n = 0$$



3- في حل متسلسلة فوريير يجب أولاً رسم الدالة لتعرف هل هي دالة زوجية أو فردية أو غير زوجية وغير فردية وذلك حسب المجال المعطى مع الدالة

4- في حالة ظهور دالة (بعد الرسم) لا فردية ولا زوجية فيجب حساب المعادلات الثلاثة (a_0, a_n, b_n)

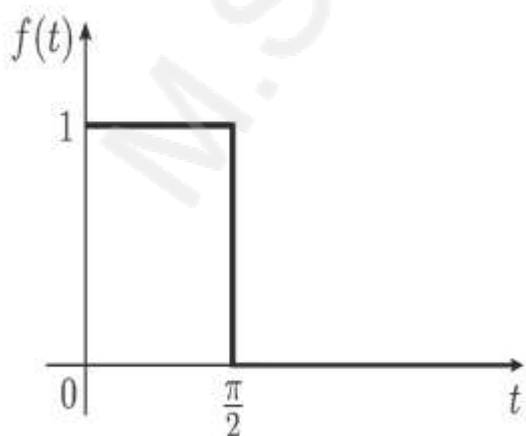
EX1: $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < 2\pi \end{cases}$

$f(t) = 1$

t	f(t)	
0	1	(0,1)
$\frac{\pi}{2}$	1	$(\frac{\pi}{2}, 1)$

$f(t) = 0$

t	f(t)	
$\frac{\pi}{2}$	0	$(\frac{\pi}{2}, 0)$
2π	0	$(2\pi, 0)$



الدالة لا زوجية ولا فردية اذا نحتاج لاستخراج القيم الثلاثة a_0, a_n, b_n

$$P = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 0 dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [0]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} * \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \cos(nt) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 0 * \cos(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \cos(nt) dt + 0 \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \cos(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \cos(nt) dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} - \frac{\sin(0)}{n} \right] \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right] \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \sin(nt) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 0 * \sin(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \sin(nt) dt + 0 \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \sin(nt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * \sin(nt) dt \right] = \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{-\cos(0)}{n} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{1}{n} \right]$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \sin nt$$

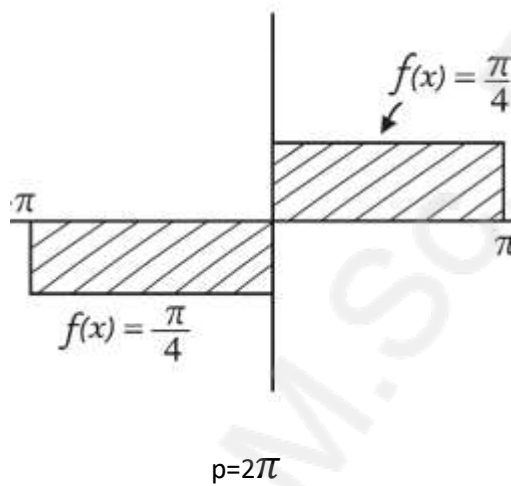
EX2: $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi < t < 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 < t < \pi \end{cases}$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4}$$

t	f(t)	
0	$-\frac{\pi}{4}$	$(0, \frac{-\pi}{4})$
$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$(-\pi, \frac{-\pi}{4})$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}$$

t	f(t)	
0	$\frac{\pi}{4}$	$(0, \frac{\pi}{4})$
π	$\frac{\pi}{4}$	$(\pi, \frac{\pi}{4})$



نلاحظ أن الدالة فردية (متناظرة حول نقطة الأصل) لذلك $a_0 = a_n = 0$

نحسب فقط b_n

$$P = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{P} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \frac{-\pi}{4} * \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} * \sin(nx) dx \right] \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} * \sin(nx) dx \right]
 \end{aligned}$$

ملاحظة مهمة : الدالة فردية لأن :

$$f(-x) = -f(x)$$

$\sin(nx)$ أيضا دالة فردية وحاصل ضرب دالة فردية في دالة فردية

ولما تكون الدالة داخل التكامل زوجية، يمكننا اختصار التكامل من $-\pi$ إلى π

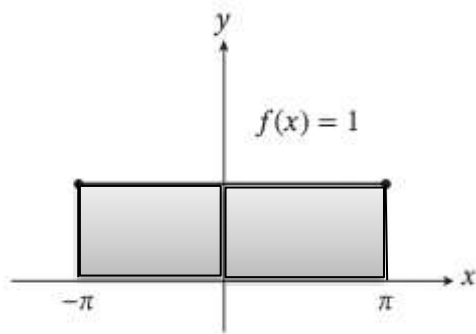
$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} \right) - \left(\frac{-\cos(n*0)}{n} \right) \right] \\
 b_n &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} \right) - \left(\frac{-(1)}{n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2n} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} [1 - \cos(n\pi)] \sin(nx)
 \end{aligned}$$

EX3: $f(x) = [1 \quad -\pi \leq x \leq \pi]$

دالة زوجية لأن $f(x) = f(-x)$



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} [x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} * (\pi - (-\pi)) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)}{n} \right]$$

لكن $\sin(-n\pi) = 0$, $\sin(n\pi) = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} * (0) = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$f(x) = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (0) \cos(nx) + 0$$

$$f(x) = \frac{2}{2} = 1$$

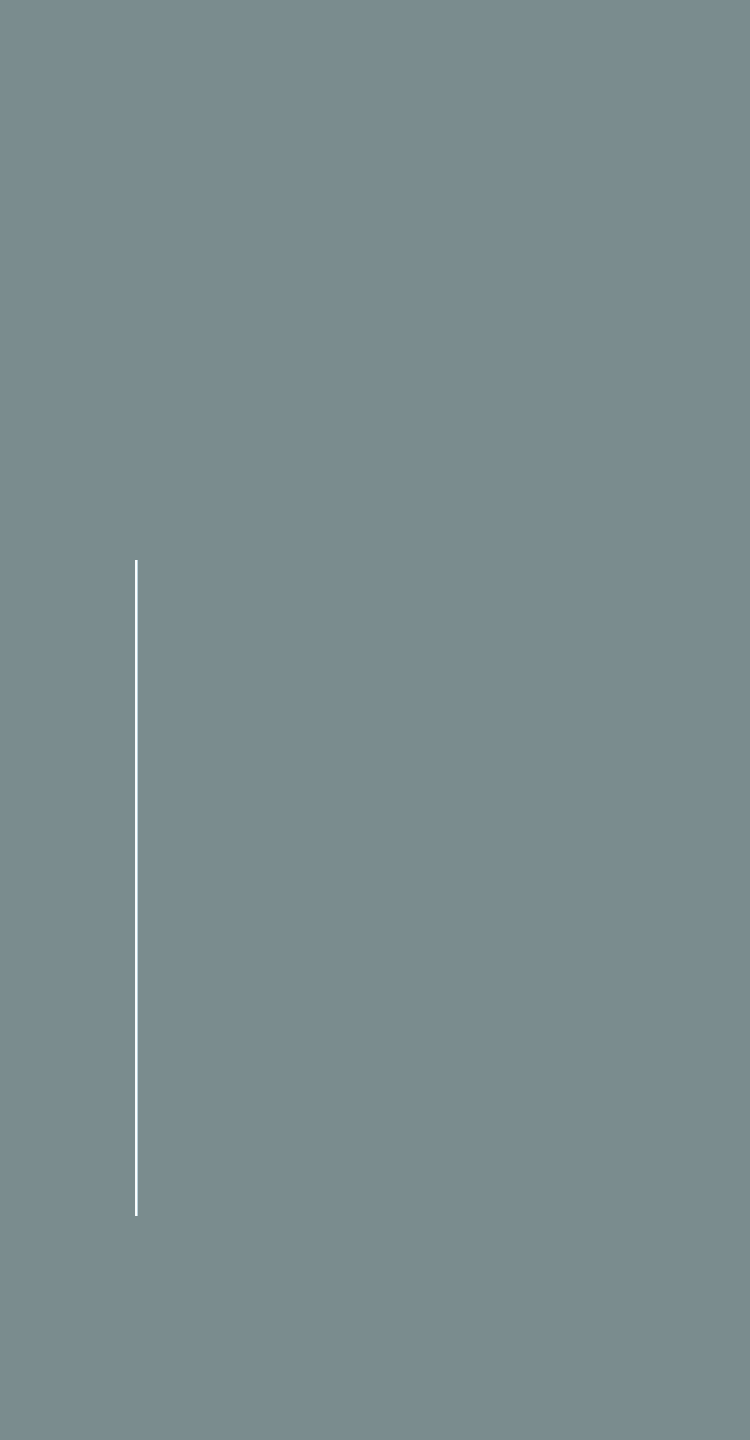
الربع	المجال الزاوي (بالدرجات)	إشارة sin (جا)	إشارة cos (جتا)
الأول	$90^\circ \rightarrow 0^\circ$	+	+
الثاني	$180^\circ \rightarrow 90^\circ$	+	-
الثالث	$270^\circ \rightarrow 180^\circ$	-	-
الرابع	$360^\circ \rightarrow 270^\circ$	-	+

الزاوية (°)	sin(θ)	cos(θ)
0°	0	1
90°	1	0
180°	0	-1
270°	-1	0
360°	0	1

H.W: Find the fourier exapansion of the fun.

$$f(x) = \begin{cases} (\pi + x) & -\pi < x < 0 \\ (\pi - x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

M.Sc. Rand Zwayen



Thank You